PART2　対数関数を含む方程式・不等式

2　[１]　次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x - \log_9 (x+2) = 0$　　(2)　$\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$

[２]　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 (3-x) \geqq \log_2 2x$　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 < 0$

Point Pickup

[１]　底を揃えて，対数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき　$p = q \iff \log_a p = \log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

[２]　底を揃えて，対数の大小に関する性質

$a > 1$ のとき　$p < q \iff \log_a p < \log_a q$

$0 < a < 1$ のとき　$p < q \iff \log_a p > \log_a q$

を利用する。真数が正であることに注意。

第12講　PART2　確認問題

次の方程式，不等式を解け。

1 $\log_2(x+4)-\log_4(x+7)=1$

$x=$ [ア]

2 $\log_5 x-\log_x 25=1$

$x=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$, [エオ]

3 $\log_3(1-2x)\leqq\log_3(5-x)$

[カ]

① $x\leqq-4$　② $x<\dfrac{1}{2}$　③ $x<5$

④ $x\geqq-4$　⑤ $x>\dfrac{1}{2}$　⑥ $x>5$

⑦ $-4\leqq x<\dfrac{1}{2}$　⑧ $-4\leqq x<5$

⑨ $\dfrac{1}{2}<x<5$

4 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x^2 > 4$

キ

① $x > \frac{1}{16}$　② $x > \frac{1}{2}$　③ $x > 16$

④ $0 < x < \frac{1}{16}$　⑤ $0 < x < \frac{1}{2}$

⑥ $0 < x < 16$　⑦ $\frac{1}{2} < x < 16$

⑧ $\frac{1}{16} < x < 16$　⑨ $0 < x < \frac{1}{2},\ 16 < x$

⑩ $0 < x < \frac{1}{16},\ \frac{1}{2} < x$

【MEMO】

PART2　対数関数を含む方程式・不等式

2　［１］　次の方程式を解け。

(1)　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　　(2)　$\log_3 x+2\log_x 3=3$

［２］　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2(3-x)\geqq\log_2 2x$　　(2)　$\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$

［１］　(1)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+2>0$　　よって　$x>0$ ……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_3 x-\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=0 \qquad \log_3 x-\frac{\log_3(x+2)}{2}=0$$

$$2\log_3 x-\log_3(x+2)=0 \qquad \log_3 x^2=\log_3(x+2)$$

よって　$x^2=x+2$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$　　$x=2,\ -1$

①より　$x=2$

(2)　真数が正で，底は１でない正の数であるから　$x>0,\ x\neq 1$ ……①

このとき，方程式を変形すると　$\log_3 x+2\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=3$

$\log_3 x=t$ とおくと　$t+\dfrac{2}{t}=3$　　$t^2-3t+2=0$　　$(t-1)(t-2)=0$　　$t=1,\ 2$

よって　$\log_3 x=1,\ 2$　　　したがって　$x=3,\ 9$　(①を満たす)

［２］　(1)　真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x>0$　　よって　$0<x<3$ ……①

底２は１より大きいから，不等式より　$3-x\geqq 2x$　　$x\leqq 1$

①より　$0<x\leqq 1$

(2)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^2>0$　　よって　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x-3<0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3<0$　　$(t+1)(t-3)<0$　　$-1<t<3$

よって　$-1<\log_{\frac{1}{3}}x<3$　　$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{3}$ は０より大きく１より小さいから　$\dfrac{1}{27}<x<3$　(①を満たす)

第12講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2

[解説]

真数は正であるから

$x+4>0$ かつ $x+7>0$ [A]

すなわち　$x>-4$ かつ $x>-7$

よって　$x>-4$　……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_2(x+4)-\frac{\log_2(x+7)}{\log_2 2^2}=1$$ [B] [C]

$$\log_2(x+4)-\frac{\log_2(x+7)}{2}=1$$

$$2\log_2(x+4)-\log_2(x+7)=2$$

$$\log_2(x+4)^2=\log_2 4+\log_2(x+7)$$ [D]

$$\log_2(x+4)^2=\log_2 4(x+7)$$

よって

$$(x+4)^2=4(x+7)$$

$$x^2+4x-12=0$$

$$(x-2)(x+6)=0$$

ゆえに　$x=2,\ -6$

①より　$\boldsymbol{x=2}$

[A]　真数が正であることに注意。

[B]　底を揃える。

[C]　底の変換公式
$a,\ b,\ c$ は正の数で，$a\neq1,\ b\neq1,\ c\neq1$ とすると

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

特に $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

[D]　対数の性質
$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$ で，k は実数のとき

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

特に $\log_a\dfrac{1}{N}=-\log_a N$

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

2 **[正解]** イ：1，ウ：5，エオ：25

[解説]

真数は正で，底は 1 でない正の数であるから

$x>0$ かつ $x \neq 1$ ……①

このとき，方程式を変形すると

$$\log_5 x-\log_x 5^2=1$$

$$\log_5 x-2\cdot\frac{1}{\log_5 x}=1$$ [C]

$\log_5 x=t$ とおくと

$$t-\frac{2}{t}=1$$

$$t^2-t-2=0$$

$$(t+1)(t-2)=0$$

よって　$t=-1,\ 2$

ゆえに　$\log_5 x=-1,\ 2$

すなわち　$\log_5 x=\log_5 5^{-1},\ \log_5 5^2$

よって　$\boldsymbol{x=\frac{1}{5},\ 25}$（①を満たす）

3 **[正解]** カ：⑦

[解説]

真数は正であるから

$1-2x>0$ かつ $5-x>0$ [A]

すなわち　$x<\frac{1}{2}$ かつ $x<5$

よって　$x<\frac{1}{2}$ ……(＊)

底 3 は 1 より大きいから，不等式より

$1-2x \leqq 5-x$ [E]

$x \geqq -4$

これと(＊)より

$$\boldsymbol{-4 \leqq x<\frac{1}{2}}$$

[E]　対数の大小に関する性質
$a>1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$
$0<a<1$ のとき
$p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$

4 [正解] キ：⑨

[解説]

真数は正であるから

$x>0$ かつ $x^2>0$ [A]

よって　$x>0$　……(＊)

このとき，不等式を変形すると

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+3\cdot 2\frac{\log_{\frac{1}{2}}x}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2}>4$$ [C]

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+3\log_{\frac{1}{2}}x-4>0$$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと

$$t^2+3t-4>0$$

$$(t+4)(t-1)>0$$

よって

$$t<-4,\ 1<t$$

ゆえに

$$\log_{\frac{1}{2}}x<-4,\ 1<\log_{\frac{1}{2}}x$$

すなわち

$$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4},\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x$$

よって

$$\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}16,\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$x<\frac{1}{2},\ 16<x$ [E]

これと(＊)より

$$\boldsymbol{0<x<\frac{1}{2},\ 16<x}$$